TD n$^{\text{o}}$ 13 : Variables aléatoires

Exercice 1. *Vérification loi*
Soient $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{a}{n(n+1)(n+2)}.$$

Déterminer la valeur de a.

Exercice 2. *Mémoire défaillante*
Une personne se trouve au centre d'une pièce comptant quatre portes dont une seule n'est pas verrouillée. On note X le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne porte. Déterminer la loi de X sous chacune de ces trois hypothèses :

1. La personne a une mémoire parfaite : à chaque nouvel essai, elle évite les portes verrouillées testées précédemment et choisit au hasard parmi les autres.
2. La personne a seulement une mémoire immédiate : à chaque nouvel essai, elle évite la porte verrouillée de la tentative précédente et choisit au hasard parmi les trois autres.
3. La personne n'a pas de mémoire : à chaque nouvel essai, elle choisit de façon équiprobable parmi les quatre portes.

Exercice 3. *Une première histoire de clés*
Un étudiant rentre de soirée, il dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ clés dont une seule ouvre la porte de son appartement mais il ne sait plus laquelle. Il essaie les clés les unes après les autres en éliminant celles qui n'ont pas ouvert. On note X le nombre d'essais pour trouver la bonne clé.

1. Déterminer $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Calculer $P(X \geqslant k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
3. En déduire la loi de X.

Exercice 4. ★ *Min et max*
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue p tirages successifs avec remise (avec $1 \leqslant p \leqslant n$), on note X le plus petit numéro obtenu et Y le plus grand.

1. Pour tout $y \in [\![1\,;n]\!]$, calculer $P(Y \leqslant y)$. En déduire la loi de Y.
2. Pour tout $x \in [\![1\,;n]\!]$, calculer $P(X \geqslant x)$. En déduire la loi de X.

1 Espérance et variance

Exercice 5. *Espérance finie ?*
On considère X une variable aléatoire sur $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geqslant 1$.

1. Vérifier qu'il existe une probabilité P sur Ω telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = u_n$.
2. Justifier que X n'est pas d'espérance finie mais que $\sqrt{X}$ l'est.

Exercice 6. *Admettre une espérance ? une variance ?*
On reprend la loi définie dans l'exercice 1.

1. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
2. Admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Exercice 7. *Calcul espérance et variance*
Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \dfrac{1}{2^{k+1}}$.

1. Justifier que ceci définit bien une loi de probabilité.
2. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.
3. Montrer que X^2 est d'espérance finie et calculer $V(X)$.

Exercice 8. *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*
On sait que 40 % des Néerlandais vont au travail en vélo. On considère un échantillon 200 Néerlandais pris au hasard. Peut-on affirmer, avec plus de 80 % de chance d'avoir raison, que dans cet échantillon il y a entre 30 % et 50 % des personnes qui vont au travail en vélo ?

2 Lois usuelles

Exercice 9. *Sauts de puce*
Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées 0, 1, 2, 3, etc. de gauche à droite. Une puce, qui se situe au départ sur la case numéro 0, se déplace vers la droite de 1 ou 2 cases (de façon équiprobable) à chaque saut. On note X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Déterminer la loi de X_1 puis calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. On appelle Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une seule case au cours des n premiers sauts. Déterminer la loi de Y_n puis calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
3. Exprimer X_n en fonction de Y_n et en déduire la loi de X_n.
4. Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

Exercice 10. *Inégalités et probabilités*
On lance 3600 fois un dé équilibré. On souhaite minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du 1 soit compris strictement entre 480 et 720. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'apparitions du 1.

1. Quelles est la loi suivie par X ? En déduire une expression de la valeur exacte de $P(480 < X < 720)$ sous forme d'une somme.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Montrer que $480 < X < 720$ si et seulement si $|X - E(X)| < 120$.
   En déduire un minorant de $P(480 < X < 720)$.

Exercice 11. *Transfert*
Soient $p \in]0\,;1[$ et X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
Montrer que $1/X$ est d'espérance finie et la calculer.

Exercice 12. *Nouvelle histoire de clés*
On reprend la situation de l'exercice 3 mais la soirée a été plus longue que la dernière fois : l'étudiant ne se souvient pas des clés qu'il a déjà essayé et à chaque essai il en prend une au hasard parmi ses n clés. On note Y le nombre d'essais pour trouver la bonne clé.

1. Donner la loi de Y.
2. Combien d'essais lui faut-il en moyenne ?
3. Déterminer le nombre d'essais nécessaires (en fonction de n) pour qu'il ouvre sa porte avec une probabilité supérieure ou égale à 90 %.

Exercice 13. ★ *Presque géométrique*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une entreprise souhaite recruter un employé parmi n candidats. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle et de manière indépendante un test, le premier qui le réussit est engagé. Chacun a une probabilité de réussir le test égale à $p \in]0\,;1[$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k-ième candidat est engagé et $X = n+1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Quelle valeur faut-il choisir pour p pour avoir au moins une chance sur deux de recruter un des 5 candidats présents.

Exercice 14. *Poisson et gain*
Perceval et Karadoc joue à un jeu qui consiste à tirer au hasard un entier naturel N où N suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Les règles sont les suivantes :

— si N est impair, Perceval gagne et reçoit N euros de Karadoc ;
— si N est pair et non nul, Karadoc gagne et reçoit N euros de Perceval ;
— si $N = 0$, la partie est nulle.

On note p la probabilité que Perceval gagne et q celle que Karadoc gagne.

1. Calculer $p + q$ et $p - q$. En déduire p et q.
2. En déduire l'espérance de gains de chacun. L'un des joueurs est-il avantagé par rapport à l'autre ?